ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-696-706
УДК 517.929

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

© **Т. Л. Сабатулина**

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: TSabatulina@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются несколько нелинейных уравнений, являющихся моделями динамики популяций и кроветворения. Для этих уравнений получены признаки осцилляции решений относительно нетривиального положения равновесия.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; уравнение Хатчинсона; уравнение Ласоты–Важевски; уравнение Николсона; сосредоточенное запаздывание; распределенное запаздывание

Введение

Для моделирования различных процессов в биологии широко используются функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ). В частности, модели Хатчинсона и Николсона используются для описания динамики популяции, модель Ласоты–Важевски — для описания процессов кроветворения. Учет эффекта «последействия» позволяет описывать динамику популяций более глубоко и точно. В отличие от моделей, в которых используются обыкновенные дифференциальные уравнения, моделям с ФДУ свойственна осцилляция решений, что подтверждается эмпирически. Именно поэтому нас будут интересовать условия осцилляции решений указанных моделей относительно нетривиального положения равновесия.

1. Предварительные сведения

Будем называть определенную на положительной полуоси непрерывную функцию *осциллирующей*, если она имеет на полуоси неограниченную справа последовательность нулей. Уравнение назовем *осциллирующим*, если все его решения осциллируют.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание №1.5336.2017/8.9) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + b_1 \int_0^h f(x(t-s))\, dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

где $b_0, b_1, h \in \mathbb{R}_+$, функция $r : [0,h] \to \mathbb{R}_+$ непрерывна слева, не убывает, $r(0) = 0$, функция f непрерывно дифференцируема, функция f' локально ограниченна в существенном, решение x при отрицательном значении аргумента доопределено ограниченной непрерывной функцией.

Для уравнения (1.1) справедлив следующий результат.

Теорема 1.1 ([1]). *Пусть* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ *и* $xf(x) > 0$ *при* $x \neq 0$. *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$ *уравнение*

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + (1-\varepsilon) b_1 \int_0^h x(t-s)\, dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

является осциллирующим, то уравнение (1.1) *также является осциллирующим.*

Таким образом, с помощью теоремы 1.1 задача исследования осцилляции решений нелинейного уравнения сводится к изучению осцилляции решений линейного уравнения.

Приведем несколько известных признаков осцилляции, причем будем разделять и учитывать случаи сосредоточенного и распределенного запаздывания.

Теорема 1.2 ([2, 3, p. 40, Corollary 2.2.1]). *Уравнение*

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + b_1 x(t-\tau) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

является осциллирующим тогда и только тогда, когда $(b_1\tau, b_0\tau) \in D_1$, *где* $D_1 = \{(u,v)\colon u > e^{-v-1}\}$.

Следствие 1.1 ([4, 5]). *При* $b_0 = 0$ *уравнение* (1.3) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда* $b_1\tau > \frac{1}{e}$.

На рис. 1 множество D_1 закрашено.

В декартовой системе координат $Ouvw$ зададим параметрически поверхность $u = \omega(v,w)$:

$$\left\{ u = \zeta + \frac{\zeta\left(1-e^{\zeta}\right)}{e^{\zeta}(\zeta(w+1)-1) + (1-\zeta w)},\ v = \frac{\zeta^2 e^{-\zeta w}}{e^{\zeta}(\zeta(w+1)-1) + (1-\zeta w)} \right\},\ \zeta \in \mathbb{R},\ w \geqslant 0.$$

Обозначим через D_2 область, определенную неравенствами $u > \omega(v,w)$, $w \geqslant 0$. На рис. 2 изображена поверхность $u = \omega(v,w)$, множество D_2 расположено выше нее.

Теорема 1.3 ([6–8]). *Уравнение*

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + b_1 \int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)\, ds = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

является осциллирующим тогда и только тогда, когда $\left(b_0 h, b_1 h^2, \frac{\tau}{h}\right) \in D_2$.

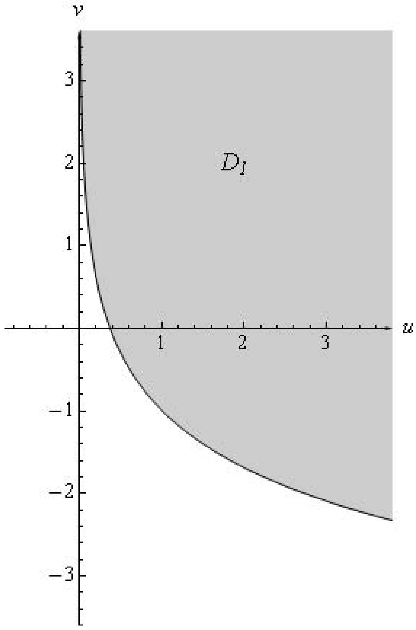

Рис. 1: Множество D_1

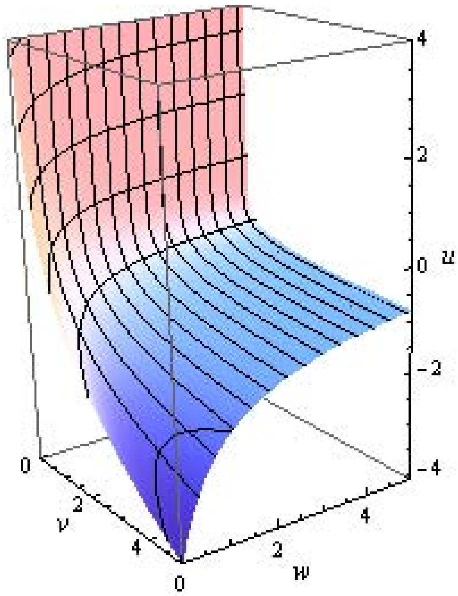

Рис. 2: Множество D_2 (расположено выше поверхности)

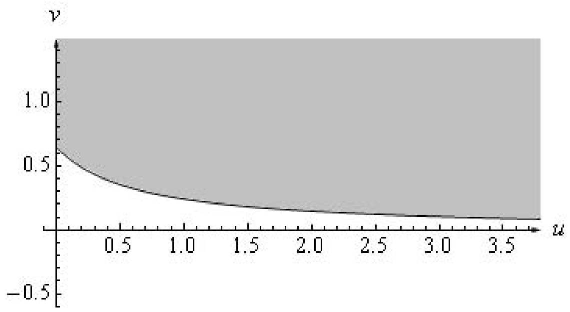

Рис. 3: Множество $v > \psi(u)$

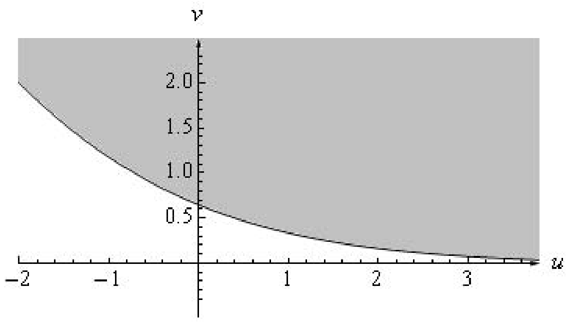

Рис. 4: Множество $v > \omega(u)$

Зададим параметрически функцию $v = \psi(u)$:

$$u = \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{1 - e^{-\zeta}}, \quad v = \frac{\zeta^2 e^{-2 + \frac{\zeta}{1 - e^{-\zeta}}}}{e^{\zeta} - 1}, \quad \zeta \in (0, \zeta_0],$$

где ζ_0 — положительный корень уравнения $e^{-\zeta} = 1 - \frac{\zeta}{2}$. На рис. 3 изображена функция $v = \psi(u)$, множества $v > \psi(u)$ закрашено.

Следствие 1.2. *При* $b_0 = 0$ *уравнение* (1.4) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда* $b_1 h^2 > \psi\left(\frac{\tau}{h}\right)$.

Зададим параметрически функцию $v = \omega(u)$:

$$u = \zeta + \frac{\zeta\left(1 - e^{\zeta}\right)}{e^{\zeta}(\zeta - 1) + 1}, \quad v = \frac{\zeta^2}{e^{\zeta}(\zeta - 1) + 1}, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

На рис. 4 изображена функция $v = \omega(u)$, множество $v > \omega(u)$ закрашено.

Следствие 1.3. *При* $\tau = 0$ *уравнение* (1.4) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда* $b_1 h^2 > \omega(b_0 h)$.

Следствие 1.4. *При* $b_0 = 0$ *и* $\tau = 0$ *уравнение* (1.4) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда* $b_1 h^2 > b^* = \zeta_0(2 - \zeta_0)$.

Заметим, что $b^* \approx 0.64$, $\zeta_0 \approx 1.59$.

Далее исследуем уравнения Хатчинсона, Ласоты–Важевски и Николсона как с сосредоточенным, так и с распределенным запаздыванием. Несмотря на существенные биологические различия моделей, исследование осцилляции указанных моделей можно провести по единой схеме. В результате изучение нелинейных ФДУ, которыми описываются перечисленные выше модели, сводится к исследованию линейных ФДУ с сосредоточенным или распределенным запаздыванием, признаки осцилляции для которых известны.

2. Уравнение Хатчинсона

Первая широко известная математическая модель в биологии, учитывающая запаздывание по времени, по-видимому, была предложена Дж. Хатчинсоном в 1948 г. [9]. Эта модель описывает динамику популяции в условиях ограниченности ресурсов. Рассмотрим уравнение Хатчинсона с сосредоточенным запаздыванием

$$\dot N(t) = r\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right) N(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

и с распределенным запаздыванием

$$\dot N(t) = r\left(1 - \frac{1}{hK}\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} N(s)\,ds\right) N(t), \quad t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

В обоих уравнениях $N(t)$ — величина популяции в момент времени t, K — максимальное число особей, способных прокормиться при заданном количестве пищи, r — коэффициент прироста популяции, τ, h — запаздывания по времени, то есть $r, K, h > 0$, $\tau \geqslant 0$. При отрицательных значениях t решение доопределено начальной функцией φ.

Каждое из уравнений (2.1)–(2.2) имеет единственное ненулевое положение равновесия $N^* = K$.

С помощью замены $N(t) = Ke^{-x(t)}$ перейдем от уравнений (2.1)–(2.2) к уравнениям

$$\dot x(t) = -rf(x(t-\tau)), \quad t \geqslant 0, \tag{2.3}$$

$$\dot x(t) = -\frac{r}{h}\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} f(x(s))\,ds, \quad t \geqslant 0, \tag{2.4}$$

где $f(x) = 1 - e^{-x}$. Положение равновесия N^* уравнений (2.1)–(2.2) соответствует нулевому положению равновесия уравнений (2.3)–(2.4).

Лемма 2.1 ([1]). *Пусть* $r\tau > \frac{1}{e}$. *Тогда уравнение* (2.3) *является осциллирующим.*

Доказательство. Очевидно, что справедливы предположения теоремы 1.1, так как для функции $f(x) = 1 - e^{-x}$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ и $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Из $r\tau > \frac{1}{e}$ вытекает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо $(1-\varepsilon)r\tau > \frac{1}{e}$. Значит, по следствию 1.1 уравнение $\dot{x}(t) + (1-\varepsilon)rx(t-\tau) = 0$ является осциллирующим.

Далее достаточно применить теорему 1.1, из которой следует, что уравнение (2.3) является осциллирующим. □

Возвращаясь к уравнению (2.1), получаем следующий результат.

Теорема 2.1 ([1]). *Пусть* $r\tau > \frac{1}{e}$. *Тогда функция* $N(t) - K$, *где* N *— решение уравнения* (2.1), *осциллирует при любых* φ.

Аналогично получаются результаты для уравнения Хатчинсона с распределенным запаздыванием.

Лемма 2.2. *Пусть* $\frac{\tau}{h} > \psi(rh)$. *Тогда уравнение* (2.3) *является осциллирующим.*

Теорема 2.2. *Пусть* $rh > \psi\left(\frac{\tau}{h}\right)$. *Тогда функция* $N(t) - K$, *где* N *— решение уравнения* (2.2), *осциллирует при любых* φ.

Следствие 2.1. *Пусть* $\tau = 0$, $rh > b^*$. *Тогда функция* $N(t) - K$, *где* N *— решение уравнения* (2.2), *осциллирует при любых* φ.

3. Уравнение Ласоты–Важевски

Уравнение Ласоты–Важевски описывает процесс производства красных кровяных телец (эритроцитов), данная модель была предложена в работе [10].

Пусть $N(t)$ — количество эритроцитов в момент времени t. Допустим, что коэффициент их разрушения в единицу времени не зависит от времени и возрастной структуры, а скорость разрушения эритроцитов пропорциональна их количеству. Коэффициент разрушения обозначим через μ.

Чтобы поддержать количество эритроцитов в крови на оптимальном уровне, организм должен реагировать на их недостаток и начать выработку новых. Реакция наступает не мгновенно, а спустя некоторое время. Обозначим через τ запаздывание гемопоэтической (кроветворной) системы, то есть время между стимуляцией к производству и вхождению красных кровяных телец в систему кровообращения. Функция «прироста» выбиралась в виде $pe^{-\alpha N(t-\tau)}$, то есть предполагалось, что скорость рождения новых эритроцитов в момент времени t тем больше, чем меньше было их наличное количество в момент времени $t-\tau$. Если эритроцитов становится больше, то прирост уменьшается, асимптотически стремясь к нулю. Коэффициенты p и α постоянны и определяются экспериментально. Показатель α характеризует возбудимость гемопоэтической системы, то есть это относительное приращение производства на одну клетку, коэффициент p учитывает потребность в кислороде, возрастающая потребность увеличивает коэффициент.

Объединяя производство красных кровяных телец и их разрушение, получаем уравнение Ласоты–Важевски с сосредоточенным запаздыванием

$$\dot{N}(t) = -\mu N(t) + pe^{-\alpha N(t-\tau)}, \quad t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

и с распределенным запаздыванием

$$\dot{N}(t) = -\mu N(t) + \frac{p}{h}\int_{t-h-\tau}^{t-\tau} e^{-\alpha N(s)}\, ds, \quad t \geqslant 0. \tag{3.2}$$

В обоих уравнениях $\mu, p, \alpha, h > 0$, $\tau \geqslant 0$. При отрицательных значениях t решение доопределено начальной функцией φ.

Оказывается важным следующее: как постоянный недостаток, так и избыток эритроцитов в крови классифицируется медициной как болезнь. Очевидно, что «заставить» организм поддерживать количество эритроцитов постоянным невозможно; нормальным считается состав крови, при котором происходит колеблемость количества эритроцитов около ненулевого положения равновесия. С математической точки зрения это означает существование у уравнений (3.1) и (3.2) устойчивых осциллирующих решений.

Каждое из уравнений (3.1)–(3.2) имеет единственное ненулевое (положительное) положение равновесия, которое удовлетворяет уравнению $\mu N^* = pe^{-\alpha N^*}$.

С помощью замены $N(t) = \frac{x(t)}{\alpha} + N^*$ перейдем от уравнений (3.1)–(3.2) к уравнениям

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) - \mu\alpha N^* f(x(t-\tau)), \quad t \geqslant 0, \tag{3.3}$$

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) - \frac{\mu\alpha N^*}{h}\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} f(x(s))\, ds, \quad t \geqslant 0, \tag{3.4}$$

где $f(x) = 1 - e^{-x}$. Положение равновесия N^* уравнений (3.1)–(3.2) соответствует нулевому положению равновесия уравнений (3.3)–(3.4).

Лемма 3.1 ([1]). *Пусть* $(\mu\alpha N^*\tau, \mu\tau) \in D_1$. *Тогда уравнение* (3.3) *является осциллирующим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливы предположения теоремы 1.1, так как функция f для уравнения (3.3) совпадает с функцией f для уравнения (2.3).

Поскольку область D_1 открыта, то из $(\mu\alpha N^*\tau, \mu\tau) \in D_1$ вытекает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо $((1-\varepsilon)\mu\alpha N^*\tau, \mu\tau) \in D_1$. Значит, по теореме 1.2 уравнение $\dot{x}(t) + \mu x(t) + (1-\varepsilon)\mu\alpha N^* x(t-\tau) = 0$ является осциллирующим.

Далее достаточно применить теорему 1.1, из которой следует, что уравнение (3.3) является осциллирующим. □

Возвращаясь к уравнению (3.1), получаем следующий результат.

Теорема 3.1 ([1]). *Пусть* $(\mu\alpha N^*\tau, \mu\tau) \in D_1$. *Тогда функция* $N(t) - N^*$, *где* N *— решение уравнения* (3.1), *осциллирует при любых* φ.

Аналогично получаются результаты для уравнения Ласоты–Важевски с распределенным запаздыванием.

Лемма 3.2. *Пусть* $\left(\mu h, \mu\alpha N^* h, \frac{\tau}{h}\right) \in D_2$. *Тогда уравнение* (3.3) *является осциллирующим.*

Теорема 3.2. *Пусть* $\left(\mu h, \mu\alpha N^* h, \frac{\tau}{h}\right) \in D_2$. *Тогда функция* $N(t) - N^*$, *где* N — *решение уравнения* (3.2), *осциллирует при любых* φ.

Следствие 3.1. *Пусть* $\tau = 0$, $\mu\alpha N^* h > \omega(\mu h)$. *Тогда функция* $N(t) - N^*$, *где* N — *решение уравнения* (3.2), *осциллирует при любых* φ.

4. Уравнение Николсона

В 1954 г. А. Николсон опубликовал [11, 12] данные о наблюдении за лабораторной популяцией Lucilia cuprina. Популяция развивалась в условиях конкуренции за ограниченное количество белков, необходимых для воспроизводства; остальная часть рациона была в свободном доступе. Эксперимент продолжался около двух лет. В динамике популяций были обнаружены характерные колебания (циклы), длиной около 35–40 дней. А. Николсон предположил, что основная причина колебаний — запаздывание во времени, связанное с периодом «взросления» особей.

Р. Мэй [13] предложил применить для описания эксперимента Николсона модель Хатчинсона (см. (2.1)). Однако подстановка экспериментальных данных в это уравнение привела к выводу, что продолжительность развития от яйца до взрослой особи должна быть равна 9 дням. Этот результат существенно отличался от фактически наблюдаемого временного периода (около 15 дней), зафиксированного А. Николсоном [12].

Чтобы устранить несоответствие в оценке величины запаздывания, W. Gurney, S. Blythe и R. Nisbet [14] предложили следующее уравнение (впоследствии за ним закрепилось название «уравнение Николсона»):

$$\dot{N}(t) = -\mu N(t) + pN(t-\tau)e^{-\alpha N(t-\tau)}, \quad t \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Позднее [1] было предложено уравнение Николсона с распределенным запаздыванием

$$\dot{N}(t) = -\mu N(t) + \frac{p}{h}\int_{t-h-\tau}^{t-\tau} N(s)e^{-\alpha N(s)}\,ds, \quad t \geqslant 0. \tag{4.2}$$

В обоих уравнениях $N(t)$ — численность популяции в момент времени t, p — максимальная скорость суточного производства яиц на особь, $\frac{1}{\alpha}$ — размер популяции, при котором популяция воспроизводится с максимальной скоростью, μ — скорость гибели взрослых особей в сутки на особь, τ — время жизни поколения. Таким образом, $\mu, p, \alpha, h > 0$, $\tau \geqslant 0$. При отрицательных значениях t решение доопределено начальной функцией φ.

Каждое из уравнений (4.1)–(4.2) имеет единственное ненулевое положение равновесия $N^* = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{p}{\mu}$.

С помощью замены $N(t) = \frac{x(t)}{\alpha} + N^*$ перейдем от уравнений (3.1)–(3.2) к уравнениям

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) - p(\alpha N^* - 1)f(x(t-\tau)), \quad t \geqslant 0, \tag{4.3}$$

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) - \frac{p(\alpha N^* - 1)}{h}\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} f(x(s))\,ds, \quad t \geqslant 0, \tag{4.4}$$

где $f(x) = \frac{1}{\alpha N^*-1}\left(\alpha N^*(1-e^{-x}) - xe^{-x}\right)$. Положение равновесия N^* уравнений (4.1)–(4.2) соответствует нулевому положению равновесия уравнений (4.3)–(4.4).

Лемма 4.1 ([1]). *Пусть* $\frac{p}{\mu} > e$, *решение* x *уравнения* (4.3) (*или* (4.4)) *отрицательно при любых* $t > t_1 \geqslant 0$. *Тогда существует* t^* *такое, что* $x(t) > 1-\alpha N^*$, $t > t^*$.

Лемма 4.2 ([1]). *Пусть* $\frac{p}{\mu} > e$ *и* $\left(p\tau \ln\frac{p}{\mu}, \mu\tau\right) \in D_1$. *Тогда уравнение* (4.3) *является осциллирующим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку область D_1 открыта, то из $\left(p\tau \ln\frac{p}{\mu}, \mu\tau\right) \in D_1$ вытекает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо $\left((1-\varepsilon)p\tau \ln\frac{p}{\mu}, \mu\tau\right) \in D_1$. Значит, по теореме 1.2 уравнение $\dot{x}(t) + \mu x(t) + (1-\varepsilon)p(\alpha N^* - 1)x(t-\tau) = 0$ является осциллирующим.

Легко видеть, что $p(\alpha N^* - 1) > 0$ и при $\frac{p}{\mu} > e$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{\alpha N^* - 1}\left(\alpha N^*(1-e^{-x}) - xe^{-x}\right)$$

выполняется $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$, $f(x) < 0$ при $x \in [1-\alpha N^*, 0)$. Значит, по лемме 4.1 имеем $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$, то есть справедливы предположения теоремы 1.1. Далее достаточно применить теорему 1.1, из которой следует, что уравнение (4.3) является осциллирующим. □

Возвращаясь к уравнению (4.1), получаем следующий результат.

Теорема 4.1 ([1]). *Пусть* $\frac{p}{\mu} > e$ *и* $\left(p\tau \ln\frac{p}{\mu}, \mu\tau\right) \in D_1$. *Тогда функция* $N(t) - N^*$, *где* N *— решение уравнения* (4.1), *осциллирует при любых* φ.

Аналогично получаются результаты для уравнения Николсона с распределенным запаздыванием.

Лемма 4.3. *Пусть* $\frac{p}{\mu} > e$ *и* $\left(\mu h, ph\ln\frac{p}{\mu}, \frac{\tau}{h}\right) \in D_2$. *Тогда уравнение* (4.3) *является осциллирующим.*

Теорема 4.2. *Пусть* $\frac{p}{\mu} > e$ *и* $\left(\mu h, ph\ln\frac{p}{\mu}, \frac{\tau}{h}\right) \in D_2$. *Тогда функция* $N(t) - N^*$, *где* N *— решение уравнения* (4.2), *осциллирует при любых* φ.

Следствие 4.1. *Пусть* $\frac{p}{\mu} > e$, $\tau = 0$, $ph\ln\frac{p}{\mu} > \omega(\mu h)$. *Тогда функция* $N(t) - N^*$, *где* N *— решение уравнения* (4.2), *осциллирует при любых* φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berezansky L., Braverman E.* Linearized oscillation theory for a nonlinear equation with a distributed delay // Mathematical and Computer Modelling. 2008. Vol. 48. P. 287-304.

2. *Гусаренко С.А., Домошницкий А.И.* Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. Вып. 12. С. 2090-2103.

3. *Györi I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations: with applications. N. Y.: Oxford University Press, 1991. 368 p.

4. *Мышкис А.Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Т. 28 (70). № 3. С. 641-658.

5. *Коплатадзе Р.Г., Чантурия Т.А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1463-1465.

6. *Сабатулина Т.Л.* Об осциллирующих и знакоопределенных решениях автономных функционально-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 114-117.

7. *Sabatulina T.L.* Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. № 5. P. 766-769.

8. *Малыгина В.В., Сабатулина Т.Л.* Знакоопределенность решений и устойчивость линейных дифференциальных уравнений с переменным распределенным запаздыванием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 8. С. 73-77.

9. *Hutchinson G.E.* Circular causal in ecology // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1948. Vol. 50. P. 221-246.

10. *Wazewska-Czyzewska M., Lasota A.* Mathematical problems of dynamics of red blood cells production (Polish) // Mat. Stos. 1976. Vol. 3. № 6. P. 23-40.

11. *Nicholson A.J.* Compensatory reactions of populations to stresses, and their evolutionary significance // Austral. J. Zool. 1954. № 2. P. 1-8.

12. *Nicholson A.* An outline of the dynamics of animal populations // Austral. J. Zool. 1954. № 2. P. 9-65.

13. *May R.M.* Models for single populations // Theoretical Ecology: Principles and Applications / ed. by R.M. May. Oxford: Blackwell Scientific, 1976. P. 4-25.

14. *Gurney W.S.C., Blythe S.P., Nisbet R.M.* Nicholson's blowflies revisited // Nature. 1980. № 287. P. 17-21.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Сабатулина Татьяна Леонидовна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: TSabatulina@gmail.com

Для цитирования: *Сабатулина Т.Л.* Об осцилляции решений некоторых нелинейных уравнений динамики популяций // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 696–706. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-696-706

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-696-706

ON OSCILLATION OF SOLUTIONS FOR SOME NONLINEAR EQUATIONS OF POPULATION DYNAMICS

T. L. Sabatulina

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolsky prospect, Perm 614990, Russian Federation
E-mail: TSabatulina@gmail.com

Abstract. Several nonlinear equations being models of population dynamics and hematopoiesis are considered in this paper. For these equations conditions of oscillation for solutions about nontrivial equilibrium position are obtained
Keywords: functional differential equations; Hutchinson's equation; Lasota–Wazewska equation; Nicholson's blowflies equation; concentrated delay; distributed delay

REFERENCES

1. Berezansky L., Braverman E. Linearized oscillation theory for a nonlinear equation with a distributed delay. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, vol. 48, pp. 287-304.

2. Gusarenko S.A., Domoshnitskiy A.I. Ob asimptoticheskikh i ostsillyatsionnykh svoystvakh lineynykh skalyarnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka [About asymptotic and oscillation characteristics of first-order linear scalar functional differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 2090-2103. (In Russian).

3. Györi I., Ladas G. *Oscillation theory of Delay Differential Equations: with Applications*. New York, Oxford University Press, 1991, 368 p.

4. Myshkis A.D. O resheniyakh lineynykh odnorodnykh differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka ustoychivogo tipa s zapazdyvayushchim argumentom [On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1951, vol. 28 (70), no. 3, pp. 641-658. (In Russian).

5. Koplatadze R.G., Chanturiya T.A. O koleblyushchikhsya i monotonnykh resheniyakh differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka s otklonyayushchimsya argumentom [About oscillating and monotone solutions of differential first-order equation with retarded argument]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 8, pp. 1463-1465. (In Russian).

6. Sabatulina T.L. Ob ostsilliruyushchikh i znakoopredelennykh resheniyakh avtonomnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i eye prilozheniya. Tematicheskiye obzory – Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 132, pp. 114-117. (In Russian).

The work is performed within the public contract with the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (contract №1.5336.2017/8.9) and is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00928).

7. Sabatulina T.L. Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 766-769.

8. Malygina V.V., Sabatulina T.L. Znakoopredelennost' resheniy i ustoychivost' lineynykh differentsial'nykh uravneniy s peremennym raspredelennym zapazdyvaniyem [Sign-definiteness of solutions and stability of linear differential equations with variable distributed delay]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2008, no. 8, pp. 73-77. (In Russian).

9. Hut·shinson G.E. Circular causal in ecology. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 1948, vol. 50, pp. 221-246.

10. Wazewska-Czyzewska M., Lasota A. Mathematical problems of dynamics of red blood cells production. *Mat. Stos.*, 1976. vol. 3. № 6. P. 23-40.

11. Nicholson A.J. Compensatory reactions of populations to stresses, and their evolutionary significance. *Austral. J. Zool.*, 1954, no. 2, pp. 1-8.

12. Nicholson A. An outline of the dynamics of animal populations. *Austral. J. Zool.*, 1954, no. 2, pp. 9-65.

13. May R.M. Models for single populations. In: R.M. May (ed.). *Theoretical Ecology: Principles and Applications.* Oxford, Blackwell Scientific, 1976, pp. 4-25.

14. Gurney W.S.C., Blythe S.P., Nisbet R.M. Nicholson's blowflies revisited. *Nature*, 1980, no. 287, pp. 17-21.

Received 16 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Sabatulina Tatyana Leonidovna, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of Research Center «Functional Differential Equations», e-mail: TSabatulina@gmail.com

For citation: Sabatulina T.L. Ob ostsillyatsii reshenij nekotoryh nelinejnyh uravnenij dinamiki populyatsij [On oscillation of solutions for some nonlinear equations of population dynamics]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 696–706. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-696-706 (In Russian, Abstr. in Engl.).